

Warunek stopu – warunek konieczny i wystarczający

Lemma

Let r be a natural number. The following conditions are equivalent

- (i) the $3n+1$ computation for the number r is finite,
- (ii) the following formula 1 is valid

$$\exists_x \left(r \cdot 3^x + y = 2^z \right) \wedge \left(\begin{array}{l} \left(y = \sum_{j=0}^{x-1} 3^{x-1-j} \cdot 2 \sum_{p=0}^j k_p \right) \wedge \\ \left(z = \sum_{p=0}^{x-1} k_p \right) \wedge \\ \left(k_0 = \kappa(n) \wedge m_0 = \rho(n) \right) \wedge \\ \left(\bigwedge_{l=0}^{x-1} \left(k_{l+1} = \kappa(3m_l + 1) \wedge m_{l+1} = \rho(3m_l + 1) \right) \right) \end{array} \right) \quad (1)$$

Istnienie obliczenia nieskończonego

Formuła (2) mówi *istnieje taka liczba ε , która ma obliczenie nieskończone*

$$\exists \varepsilon \forall x \neg \left(\left(\varepsilon \cdot 3^x + y = 2^z \right) \wedge \left(\begin{array}{l} \left(y = \sum_{j=0}^{x-1} 3^{x-1-j} \cdot 2 \sum_{p=0}^j k_p \right) \wedge \\ \left(z = \sum_{p=0}^{x-1} k_p \right) \wedge \\ \left(k_0 = \kappa(\varepsilon) \wedge m_0 = \rho(\varepsilon) \right) \wedge \\ \left(\bigwedge_{l=0}^{x-1} \left(k_{l+1} = \kappa(3m_l + 1) \wedge m_{l+1} = \rho(3m_l + 1) \right) \right) \end{array} \right) \right) \quad (2)$$

Lemma

Następujące warunki są równoważne

- Zbiór Z formuł ma model

$$Z = \left\{ \left(\begin{array}{l} \left(y = \sum_{j=0}^{x-1} 3^{x-1-j} \cdot 2^{\sum_{p=0}^j k_p} \right) \wedge \\ \left(z = \sum_{p=0}^{x-1} k_p \right) \wedge \\ \left(k_0 = \kappa(\varepsilon) \wedge m_0 = \rho(\varepsilon) \right) \wedge \\ \left(\bigwedge_{l=0}^{x-1} (k_{l+1} = \kappa(3m_l + 1) \wedge m_{l+1} = \rho(3m_l + 1)) \right) \end{array} \right) \wedge (\varepsilon \cdot 3^x + y \neq 2^z) \right\}_{x=0}^{\infty}$$

- Liczba ε , ma obliczenie nieskończone

Przykład

0	$\varepsilon + 0 \neq 2^{k_0}$	$k_0 = \kappa(\varepsilon)$
1	$\varepsilon \cdot 3^1 + 2^{k_0} \neq 2^{k_0+k_1}$	$k_1 = \kappa(3 \cdot k_0 + 1)$
2	$\varepsilon \cdot 3^2 + 3 = \cdot 2^{k_0} + 2^{k_0+k_1} \neq 2^{k_0+k_1+k_2}$	$k_2 = \kappa(3 \cdot k_1 + 1)$
	$\dots$	
x	$\sum_{j=0}^{x-1} 3^{x-1-j} \cdot 2^{k_j} + y_j \neq 2^{z_x}$	
	$\dots$	

Zbiór formuł (2) NIE jest sprzeczny z aksjomatami Presburgera

tzn. teoria, której aksjomatami są
aksjomaty arytmetyki Presburgera

$$Ax_1 \quad \forall_x x + 1 \neq 0 \quad (3)$$

$$Ax_2 \quad \forall_{x,y} x + 1 = y + 1 \implies x = y \quad (4)$$

$$Ax_3 \quad x + 0 = x \quad (5)$$

$$Ax_4 \quad (x + (y + 1)) = (x + y) + 1 \quad (6)$$

$$\textit{Schemat indukcji} \quad (7)$$

oraz zbiór formuł Z , ma model.

Ale dodanie aksjomatu osiągalności daje teorię sprzeczną

Aksjomat osiągalności

$$\{n := \varepsilon; \textbf{while } n \neq 0 \textbf{ do } n := n - 1 \textbf{ od}\}(n = 1)$$

Ten aksjomat można zapisać z operatorem $+$ zamiast $-$.

Dla każdej liczby naturalnej n , obliczenie Collatza jest *skończone*.